

Übungsblatt 11

Modulformen für Kongruenzgruppen

41. Dirichlet–Charaktere

Ein Dirichlet–Charakter modulo k ist eine Funktion $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

- (i) Es gibt eine positive ganze Zahl k , so dass $\chi(n+k) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
 - (ii) Wenn $\text{ggT}(n, k) > 1$, dann ist $\chi(n) = 0$. Wenn $\text{ggT}(n, k) = 1$, dann ist $\chi(n) \neq 0$.
 - (iii) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.
- (iii) besagt, dass χ vollständig multiplikativ ist. Für $a \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl ist das Legendre–Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ definiert durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & a \equiv 0 \pmod{p} \\ +1 & a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ und für eine ganze Zahl } x \text{ gilt } x^2 \equiv a \pmod{p} . \\ -1 & a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ und es gibt kein solches } x \end{cases}$$

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dirichlet–Charakters: $\chi(1) = 1$. Wenn $a \equiv b \pmod{k}$, dann ist $\chi(a) = \chi(b)$. Wenn $\text{ggT}(a, k) = 1$, dann ist $\chi(a)$ eine $\phi(k)$ -te Einheitswurzel, wobei $\phi(k)$ die Eulersche Totient–Funktion ist.
- (b) (1 Punkt) Sei $\chi: \mathbb{Z}_k^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass χ zu einem Dirichlet–Charakter modulo k erweitert werden kann.
- (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt: Falls $\text{ggT}(a, p) = 1$, ist $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$. Schliessen Sie daraus, dass $\left(\frac{a}{p}\right)$ ein Dirichlet–Charakter modulo p ist.

42. Quadratische Reziprozität

(4 Punkte) Es seien p und q Primzahlen und $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ das Legendre-Symbol. Zeigen Sie, dass $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$ gilt, indem Sie zeigen, dass

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(\frac{2\pi}{p}qn)}{\sin(\frac{2\pi}{p}n)}.$$

43. Konstruktion von Modulformen für $\Gamma(N\tau)$.

(4 Punkte) Es seien $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ und $g(\tau) = f(\alpha \cdot \tau)$. Zeigen Sie, dass wenn $\alpha = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha \cdot \tau = N\tau$, dann ist $g(\tau)|_k \gamma = f(N\tau)|_k \begin{pmatrix} a & Nb \\ c/N & d \end{pmatrix}$ (cf. Aufgaben 14 und 15).

44. Konstruktion von Spitzenformen für $\Gamma(N\tau)$.

(4 Punkte) Es seien $N \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ und $k = \frac{12}{N}$. Zeigen Sie, dass $S_k(\Gamma(N)) = \mathbb{C} \cdot \Delta(N\tau)^{\frac{1}{N}}$.

Abgabetermin: Freitag, 15.1.2010 um 10:00 Uhr.